Теорія ймовірностей

Олег БУГРІЙ

Кафедра диференціальних рівнянь,
Львівський національний університет імені Івана Франка,
Львів

Львів – 2020

Ймовірність: історична довідка та базові формули

З давніх давен люди грали в азартні ігри, наприклад, в кості. Граючи самі чи спостерігаючи як грає інша людина, люди намагалися визначити якісь закономірності гри, знайти "виграшну комбінацію" чи "виграшну стратегію".

Кількість різних варіантів при виданні трьох гральних кубиків було визначено в 960 р. єпископом Віболдом з міста Камбре. Він зробив це неправильно. Опис правильних підрахунків було зроблено в XI ст. літописцем Балдерікусом. Проте опублікували його лише у 1615 р.

Розглянемо, для спрощення, один кубик. Кидатимемо його на стіл. При цьому на верхній грані кубика з'являтимуться позначки і ми кажемо, наприклад, "випало число три".

Процес кидання кубика назвемо експериментом, а випадання якогось числа – елементарною подією. В цьому експерименті є шість елементарних подій. Вони утворюють простір елеметнарних подій.

Якщо елементарну подію "випаде одиниця" схематично записати як "1", "випаде двійка" – як "2", і т.д., то множина $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ – це простір елементарних подій.

Подією назвемо кожну підмножину Ω.

Наприклад, подію $\Omega_1 = \{2,4,6\}$ можна словесно описати так: "випаде парне число", а подію $\Omega_2 = \{2,3,4,5,6\}$ – словами "випаде не одиниця".

Зрозуміло, що якщо відбулася подія Ω_1, то відбулася і подія Ω_2. Це називатимемо так: "подія Ω_1 сприяє появі події Ω_2".

Появі події Ω_1 сприяє поява трьох елементарних подій, а Ω_2 – п'ять елементарних подій.

Довгий час математики оперували лише поняттям "кількість сприятливих подій". Лише в працях Я. Бернуллі з'являється поняття ймовірності появи подій як числа між 0 та 1. Ці праці опублікували в 1713 р. через вісім років після смерті Я. Бернуллі. Проте математикам вони були відомі, ще 20 років до того завдяки листуванню.

Отож, Я. Бернуллі замість кількості подій пропонував оперувати безрозмірною величиною – часткою кількостей.

Означення. *Ймовірністю появи події $A \subset \Omega$* назвемо дріб:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{кількість елементарних подій, що сприяють появі A}}{\text{кількість всіх елементарних подій}}. \tag{1}$$

Означення. *Відносною частотою* появи події називають відношення кількості m експериментів, в яких подія з'явилася, до загальної кількості n фактично проведених експериментів, тобто число

$$z(A) = \frac{m}{n}. \tag{2}$$

Співставляючи означення ймовірності і відносної частоти, робимо висновок: означення ймовірності не потребує, щоб експерименти відбувалися насправді; означення ж відносної частоти припускає, що експерименти були проведені фактично. Іншими словами, *ймовірність обчислюють до досліду, а відносну частоту – після досліду*.

Тривалі спостереження показали, що якщо в однакових умовах проводять експерименти, в кожному з яких кількість випробувань достатньо велика, то відносна частота набуває властивості *стійкості.* Ця властивість полягає в тому, що в різних експериментах відносна частота змінюється мало (тим менше, чим більше проведено випробувань), коливаючись навколо деякого сталого числа. Виявилось, що це стале число є ймовірністю появи події. Таким чином, якщо дослідним шляхом встановлена відносна частота, то отримане число можна прийняти за наближене значення ймовірності.

Приклад. За даними шведської статистики, відносна частота народження дівчаток за 1935 р. по місяцях характеризується такими числами (числа розміщені в порядку слідування місяців, починаючи з січня):

$$0,486; \quad 0,489; \quad 0,490; \quad 0,471; \quad 0,478; \quad 0,482; \quad 0,462; \quad 0,484; \quad 0,485;$$

$$0,491; \quad 0,482; \quad 0,473.$$

Відносна частота коливається навколо числа $0,482$, яке можна взяти за наближене значення ймовірності народження дівчаток.

Зауважимо, що статистичні дані різних країн дають приблизно таке ж значення відносної частоти цієї події.

Приклад. Багаторазово проводилися досліди кидання монети, в яких підраховували кількість появ герба. Результати деяких дослідів наведені в таблиці.

Кількість кидань	**Кількість появи герба**	**Частота**
4040	2048	0,5069
12000	6019	0,5016
24000	12012	0,5005

Тут відносні частоти незначною мірою відхиляються від числа 0,5, причому тим менше, чим більша кількість експериментів.

Дискретні і неперервні випадкові величини та їхні числові характеристики

Припустимо ми проводимо експеримент під час якого з певною ймовірністю відбувається якась подія. Іноді треба описати цю подію за допомогою якихось числових характеристик (не ймовірності), що не мають до події безпосереднього відношення, проте зможуть додатково її характеризувати. Для прикладу розглянемо експеримент – стрільбу з гармати по заданій цілі. Зрозуміло, що коли випущений снаряд влучив в ціль, то додатково цю подію описувати чисельно нема потреби. Проте коли снаряд не влучив, то для аналізу цієї події і запобіганню її виникнення при повторному пострілі самого поняття ймовірності влучання/невлучання мало. Треба перш за все знати "наскільки не влучив снаряд". Так ми приходимо до поняття випадкової величини. В наведеному прикладі – це відстань від точки влучання снаряду до цілі.

Отже, величина називається *випадковою*, якщо внаслідок проведення експерименту під впливом випадкових чинників вона набуває того чи іншого можливого числового значення.

Для додаткового опису випадкових величин вводять деякі допоміжні функції.
Означення. Функцію $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ таку, що

$$F(x) = \mathbb{P}\{\xi(\omega) < x\} := \mathbb{P}\{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) < x\}, \quad x \in \mathbb{R},$$

називають *функцією розподілу* випадкової величини $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$.

Нехай ξ – випадкова величина (далі для спрощення вважатимемо, що вона приймає скінченну кількість, а саме, k значень),

$$\mathbb{P}\{\xi = x^i\} = p_i, \quad i = \overline{1, k}. \tag{3}$$

Запишемо цей факт у вигляді таблиці

ξ	x^1	x^2	$\dots$	x^k
$\mathbb{P}$	p_1	p_2	$\dots$	p_k

(4)

Відомо, що

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1. \tag{5}$$

Рівність (5) називається *умовою нормування* для дискретної випадкової величини ξ.

Маючи закон розподілу (4) не складно записати функцію розподілу цієї випадкової величини. Вона має вигляд

$$F(x) = \sum_{i:\, x^i < x} p_i, \quad x \in \mathbb{R}^m. \tag{6}$$

В загальному випадку відомо таке: ймовірність того, що одномірна випадкова величина ξ прийме значення з деякої множини $A \subset \mathbb{R}^1$ обчислюється так

$$\mathbb{P}\{\xi \in A\} := \mathbb{P}\{\omega \mid \xi(\omega) \in A\} = \int_A dF(x), \tag{7}$$

де присутній тут інтеграл є інтегралом Стільтьєса.

Означення. Випадковий вектор $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^m$ називається *неперервною випадковою величиною* (має неперервний розподіл), якщо існує *щільність ймовірності (щільність розподілу)* – така невід'ємна функція $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, що

$$\forall\, A \subset \mathbb{R} : \quad \mathbb{P}\{\xi \in A\} = \int_A q(x)\, dx. \tag{8}$$

Поєднуючи (7) з (8), отримаємо, що $\int_A dF(x) = \int_A q(x)\, dx$.

Приклад. Проведемо експеримент: з букету бузку навмання візьмемо квіточку. Кількість пелюсток в ній – дискретна випадкова величина. Ймовірність того, що пелюсток 4 близька до одиниці, що пелюсток 3 або 5 близька до нуля, що пелюсток менше 3 або більше 5 – набагато менше за попередню.

Приклад. Відстань від точки влучання снаряду до цілі – це неперервна випадкова величина. Її значення, взагалі кажучи, може бути довільним числом з деякого скінченного проміжку (a, b). Її щільність розподілу подамо пізніше.

Означення. *Математичним сподіванням* в.в. ξ з таблиці (4) називається вираз

$$\mathbb{M}(\xi) = x^1 p_1 + x^2 p_2 + \ldots + x^k p_k = \sum_{i=1}^{k} x^i p_i. \tag{9}$$

Математичне сподівання приблизно дорівнює середньому значенню випадкової величини.

Приклад. Закон розподілу для виграшу в лотерею задамо таблично:

ξ	1000	100	1	0
$\mathbb{P}$	0,0001	0,001	0,01	0,9889

Знайдіть $\mathbb{M}\,\xi$.

Математичне сподівання широко застосовується на практиці, проте не дає достатньо повної інформації про випадкову величину, бо одному й тому значенню $\mathbb{M}(\xi)$ може відповідати безліч випадкових величин, які відрізнятимуться не лише можливими значеннями, але і характером розподілу і самою природою можливих значень.

Приклад. Нехай закони розподілу випадкових величин ξ і η задані таблицями

ξ	-0,5	-0,1	0,1	0,5
$\mathbb{P}$	0,4	0,1	0,1	0,4

η	-100	-80	-10	10	80	100
$\mathbb{P}$	0,1	0,2	0,2	0,2	0,2	0,1

Зрозуміло $\mathbb{M}(\xi) = \mathbb{M}(\eta) = 0$. Отже, два закони розподілу мають однакові математичні сподівання, хоча можливі значення для випадкових величин ξ і η істотно різні. $\square$

Із прикладу бачимо, що в разі рівності математичних сподівань $(\mathbb{M}(\xi) = 0 = \mathbb{M}(\eta))$ випадкові величини ξ і η мають тенденцію до коливань відносно $\mathbb{M}(\xi) = \mathbb{M}(\eta)$, причому η має більший розмах розсіювання відносно $\mathbb{M}(\eta)$, ніж ξ відносно $\mathbb{M}(\xi)$. Тому математичне сподівання називають *центром розсіювання*. Для вимірювання розсіювання вводиться числова характеристика, яку називають *дисперсією*.

Означення. Число

$$\mathbb{D}\,\xi := \mathbb{M}\left[(\xi - \mathbb{M}\,\xi)^2\right] = \mathbb{M}\,[\xi^2] - (\mathbb{M}\,\xi)^2 \tag{10}$$

називається *дисперсією*, а число

$$\sigma(\xi) = \sqrt{\mathbb{D}\,\xi} \tag{11}$$

– *середньоквадатичним відхиленням* випадкової величини ξ.

Якщо випадкова величина ξ має закон розподілу (4), то формула (10) набуде вигляду

$$\mathbb{D}\,\xi := \sum_{i=1}^{k} (x^i - \mathbb{M}\,\xi)^2\, p_i. \tag{12}$$

Введені величини мають чіткий фізичний зміст. Для ілюстрації розмістимо на прямій OX в точках $x_1 < \ldots < x_k$ точкові маси $p_1, \ldots, p_k$, які задовольняють умову (5). Тоді $\mathbb{M}\,\xi$ – координати центру мас цієї системи точок, тобто місце, навколо якого групуються маси. $\sigma(\xi)$ – це степінь розсіяння p_i навколо $\mathbb{M}\,\xi$.

Для неперервної, одномірної випадкової величини ξ зі щільністю розподілу q

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} q(x)\, dx, \quad x \in \mathbb{R}^1,$$

$$\mathbb{M}\,\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\, q(x)\, dx, \quad \mathbb{D}\,\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2\, q(x)\, dx - (\mathbb{M}\,\xi)^2. \tag{13}$$

Класичні приклади випадкових величин

Розглянемо випадкові величини з якими стикатимемося далі.

Означення. Одномірна (дискретна) випадкова величина ξ має *рівномірний дискретний розподіл* з параметром $N \in \mathbb{N}$, якщо

$$\mathbb{P}\{\xi = k\} = \frac{1}{N}, \qquad k = \overline{1, N}. \tag{14}$$

Приклад. З формул (9), (12) знайдіть: $\mathbb{M}\,\xi$, $\mathbb{D}\,\xi$, $\sigma\xi$.

Означення. Одномірна (дискретна) випадкова величина ξ має *розподіл Пуасона* з параметром $\lambda > 0$ (писатимемо при цьому $\xi \in \Pi_\lambda$), якщо

$$\mathbb{P}\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}\,e^{-\lambda}, \qquad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{15}$$

Приклад. Переконайтеся, що якщо $\xi \in \Pi_\lambda$, то:

$$\mathbb{M}\,\xi = \lambda; \quad \mathbb{D}\,\xi = \lambda. \quad \sigma\xi = \sqrt{\lambda}.$$

Означення. Одномірна випадкова величина ξ називається *рівномірно розподіленою* по інтервалу (a, b), якщо щільність її розподілу має вигляд

$$q(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in (a, b), \\ 0, & x \notin (a, b). \end{cases} \tag{16}$$

Функція розподілу цієї величини має вигляд

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & x \in (a, b], \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

Приклад. Якщо випадкова величина ξ рівномірно розподілена на (a, b), то з формул (13) матимемо таке:

$$\mathbb{M}\,\xi = \frac{a+b}{2} \quad \text{(середина відрізка)};$$

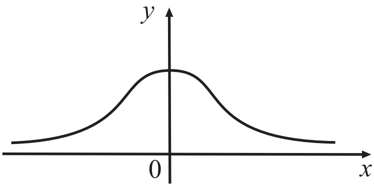
$$\mathbb{D}\,\xi = \frac{(b-a)^2}{12},$$

а тому $\sigma(\xi) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$ (тут $b - a$ – довжина відрізка). $\square$

Означення. Випадкова величина ξ називається *стандартно нормально розподіленою* (писатимемо при цьому $\xi \in N(0,1)$), якщо щільність її розподілу має вигляд

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{17}$$

Графіком φ є *крива Гауса*:



Приклад. Якщо $\xi \in N(0,1)$, то з формул (13) матимемо таке:

$$\mathbb{M}\,\xi = 0, \quad \mathbb{D}\,\xi = 1,$$

а тому $\sigma(\xi) = 1$. $\square$

Означення. Одномірна випадкова величина η називається *нормальною (гаусофською)* з параметрами $a \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$ (писатимемо при цьому $\xi \in N(a, \sigma^2)$), якщо її щільність має вигляд

$$q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{18}$$

Приклад. Якщо $\eta \in N(a, \sigma^2)$, то

$$\mathbb{M}\,\eta = a, \quad \mathbb{D}\,\eta = \sigma^2, \quad \sigma(\eta) = \sigma.$$

Для нормально розподіленої випадкової величини η діє “правило трьох σ”:

$$\mathbb{P}\left\{|\eta - \mathbb{M}\,\eta| \le 3\sigma\right\} \approx 0,9973.$$

Тому на практиці часто нехтують виходом випадкової величини за діапазон $|\eta - \mathbb{M}\,\eta| \le 3\sigma$.

Виявляється, що нормальний розподіл різних величин часто зустрічається в природі. Так розміри органів тварин певного віку підпорядковуються нормальному розподілу (Кетле Л.А. (1796-1874)), відхилення снаряду від цілі – теж нормально розподілена випадкова величина.

THE END